Esercizi sugli integrali di superficie e di flusso

Esercizio 1. Calcolare

1) $\displaystyle\int_\Sigma \frac{1}{z^4}\,d\sigma, \qquad \Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1 \le z \le 2\right\}.$

2) $\displaystyle\int_\Sigma \frac{z}{\sqrt{4+x^2+y^2}}\,d\sigma, \qquad \Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = \log\left(x^2+y^2\right),\ 1 \le x^2+y^2 \le e^2\right\}.$

3) $\displaystyle\int_\Sigma \frac{z-5}{\sqrt{1+9\sin^2 x+16\cos^2 y}}\,d\sigma,\ \Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 5+3\cos x+4\sin y,\ 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}.$

4) l'area della superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = xy,\ x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}$.

Esercizio 2. Calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(-3x,\ -3y,\ 2\sqrt{x^2+y^2}-z\right)$ attraverso la superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 2\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2 \le 9\right\}$, orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo ottuso con il versore fondamentale dell'asse z.

Esercizio 3. Calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(\frac{1}{4}x,\ \frac{9}{2}y,\ z+9\right)$ attraverso la superficie $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 4x^2 - \frac{1}{4}y^2 - 9,\ x^2+y^2 \le 4,\ y \ge 0\right\}$, orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z.

Esercizio 4. Calcolare il flusso entrante del campo vettoriale $F(x,y,z) = (4e^x,\ 2y^3z,\ -3y^2z^2)$ dal bordo dell'insieme $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \le x \le 4-y^2-z^2,\ y \ge 0\right\}$.

Esercizio 5. Calcolare il flusso uscente del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(-\frac{3z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ -\frac{3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

dal bordo dell'insieme $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 \le 16,\ y \ge 2\right\}$.

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

1) La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, dove $g(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e, essendo $1 \leq z = g(x,y) \leq 2$, si ha che $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \dfrac{1}{4} \leq x^2+y^2 \leq 1\right\}$.

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica

$$\sigma(x,y) = (x,y,g(x,y)) = \left(x,y,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Posto $f(x,y,z) = \dfrac{1}{z^4}$, per definizione

$$\int_\Sigma \frac{1}{z^4}\, d\sigma = \int_\Sigma f\, d\sigma = \int_K f(\sigma(x,y))\|N(x,y)\|\, dx\, dy,$$

dove $N(x,y) = \dfrac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \dfrac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y)$.

Si ha che

$$N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y),\, -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y),\, 1\right) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}, 1\right)$$

e quindi

$$\|N(x,y)\| = \frac{\sqrt{1+(x^2+y^2)^2}}{x^2+y^2}.$$

Essendo

$$f(\sigma(x,y)) = f\left(x,y,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \left(x^2+y^2\right)^2,$$

si ha che

$$\int_\Sigma f\, d\sigma = \int_K \left(x^2+y^2\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{1+(x^2+y^2)^2}}{x^2+y^2}\, dx\, dy = \int_K \left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine

$$= \int_{K'} \rho^3\sqrt{1+\rho^4}\, d\rho\, d\vartheta =$$

dove $K' = \left[\frac{1}{2},1\right] \times [0,2\pi]$

$$= 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^1 \rho^3 \left(1+\rho^4\right)^{1/2}\, d\rho = 2\pi \left[\frac{1}{6}\left(1+\rho^4\right)^{3/2}\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{\pi}{3}\left(2\sqrt{2} - \frac{17}{64}\sqrt{17}\right).$$

2) La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, dove $g(x,y) = \log\left(x^2+y^2\right)$ e $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le x^2+y^2 \le e^2\right\}$.

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica

$$\sigma(x,y) = (x,y,g(x,y)) = \left(x,y,\log\left(x^2+y^2\right)\right).$$

Posto $f(x,y,z) = \dfrac{z}{\sqrt{4+x^2+y^2}}$, per definizione

$$\int_\Sigma \frac{z}{\sqrt{4+x^2+y^2}}\, d\sigma = \int_\Sigma f\, d\sigma = \int_K f(\sigma(x,y)) \|N(x,y)\|\, dx\, dy,$$

dove $N(x,y) = \dfrac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \dfrac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y)$.

Si ha che

$$N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y),\ -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y),\ 1\right) = \left(-\frac{2x}{x^2+y^2},\ -\frac{2y}{x^2+y^2},\ 1\right)$$

e quindi

$$\|N(x,y)\| = \sqrt{\frac{4+x^2+y^2}{x^2+y^2}}.$$

Essendo

$$f(\sigma(x,y)) = f\left(x,y,\log\left(x^2+y^2\right)\right) = \frac{\log\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{4+x^2+y^2}},$$

si ha che

$$\int_\Sigma f\, d\sigma = \int_K \frac{\log\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{4+x^2+y^2}} \cdot \sqrt{\frac{4+x^2+y^2}{x^2+y^2}}\, dx\, dy = \int_K \frac{\log\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine

$$= \int_{K'} \log\rho^2\, d\rho\, d\vartheta =$$

dove $K' = [1,e] \times [0,2\pi]$

$$= 4\pi \int_1^e \log\rho\, d\rho =$$

integrando per parti

$$= 4\pi \left(\Big[\rho\log\rho\Big]_1^e - \int_1^e d\rho\right) = 4\pi.$$

3) La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, dove $g(x,y) = 5 + 3\cos x + 4\sin y$ e $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le \pi, \ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$.

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica

$$\sigma(x,y) = (x, y, g(x,y)) = (x, y, 5 + 3\cos x + 4\sin y)\,.$$

Posto $f(x,y,z) = \dfrac{z-5}{\sqrt{1 + 9\sin^2 x + 16\cos^2 y}}$, per definizione

$$\int_\Sigma \frac{z-5}{\sqrt{1 + 9\sin^2 x + 16\cos^2 y}}\, d\sigma = \int_\Sigma f\, d\sigma = \int_K f(\sigma(x,y))\|N(x,y)\|\, dx\, dy,$$

dove $N(x,y) = \dfrac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \dfrac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y)$.

Si ha che

$$N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y),\, -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y),\, 1\right) = (3\sin x,\, -4\cos y,\, 1)$$

e quindi

$$\|N(x,y)\| = \sqrt{1 + 9\sin^2 x + 16\cos^2 y}.$$

Essendo

$$f(\sigma(x,y)) = f\left(x, y, 5 + 3\cos x + 4\sin y\right) = \frac{3\cos x + 4\sin y}{\sqrt{1 + 9\sin^2 x + 16\cos^2 y}},$$

si ha che

$$\int_\Sigma f\, d\sigma = \int_K \frac{3\cos x + 4\sin y}{\sqrt{1 + 9\sin^2 x + 16\cos^2 y}} \cdot \sqrt{1 + 9\sin^2 x + 16\cos^2 y}\, dx\, dy = \int_K (3\cos x + 4\sin y)\, dx\, dy =$$

$$= 3\int_K \cos x\, dx\, dy + 4\int_K \sin y\, dx\, dy = \frac{3}{2}\pi \int_0^\pi \cos x\, dx + 4\pi \int_0^{\pi/2} \sin y\, dy =$$

$$= \frac{3}{2}\pi \Big[\sin x\Big]_0^\pi + 4\pi\Big[-\cos y\Big]_0^{\pi/2} = 4\pi.$$

4) La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, dove $g(x,y) = xy$ e $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le 1, \ x \ge 0, \ y \ge 0\right\}$.

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica

$$\sigma(x,y) = (x, y, g(x,y)) = (x, y, xy)\,.$$

L'area di Σ è per definizione

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int_K \|N(x,y)\|\, dx\, dy,$$

dove $N(x,y) = \dfrac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \dfrac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y)$.

Si ha che

$$N(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y),\, -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y),\, 1\right) = (-y,\, -x,\, 1)$$

e quindi

$$\|N(x,y)\| = \sqrt{1+x^2+y^2}.$$

Ne segue che

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int_K \sqrt{1+x^2+y^2}\, dx\, dy =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine

$$= \int_{K'} \rho\sqrt{1+\rho^2}\, d\rho\, d\vartheta =$$

dove $K' = [0,1] \times [0, \pi/2]$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \rho\left(1+\rho^2\right)^{1/2}\, d\rho = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{3}\left(1+\rho^2\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}(2\sqrt{2}-1).$$

Esercizio 2. La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = 2\sqrt{x^2+y^2}$, dove

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \le 9\right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica $\sigma(x,y) = (x,y,g(x,y)) = \left(x, y, 2\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

Il flusso di F attraverso Σ, orientata in modo che il vettore normale a Σ formi un angolo ottuso con il versore fondamentale dell'asse z è

$$\int_\Sigma F \cdot n\, d\sigma = \int_K F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y)\, dx\, dy,$$

dove $N(x,y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo ottuso con il versore fondamentale dell'asse z, cioè con $\mathbf{k} = (0,0,1)$.

Un vettore normale a Σ è

$$N_\sigma(x,y) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = \left(-\frac{2x}{x^2+y^2}, -\frac{2y}{x^2+y^2}, 1\right).$$

Poiché

$$N_\sigma(x,y) \cdot \mathbf{k} = \left(-\frac{2x}{x^2+y^2}, -\frac{2y}{x^2+y^2}, 1\right) \cdot (0,0,1) = 1 > 0,$$

questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z. Quindi un vettore che forma un angolo ottuso con il versore fondamentale dell'asse z è $N(x,y) = -N_\sigma(x,y) = \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)$.

Si ha che

$$F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) = F\left(x, y, 2\sqrt{x^2+y^2}\right) \cdot \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right) =$$

$$= (-3x, -3y, 0) \cdot \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right) = -6\sqrt{x^2+y^2}.$$

Quindi

$$\int_\Sigma F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) \, dx \, dy = -6 \int_K \sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy =$$

passando in coordinate polari

$$= -6 \int_{K'} \rho^2 \; d\rho \, d\vartheta =$$

essendo $K' = [0,3] \times [0, 2\pi]$ si ottiene

$$= -12\pi \int_0^3 \rho^2 \, d\rho = -12\pi \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^3 = -108\pi.$$

Esercizio 3. La superficie Σ è il grafico della funzione $g : K \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = 4x^2 - \frac{1}{4}y^2 - 9$, dove

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; x^2 + y^2 \le 4, \;\; y \ge 0\right\}.$$

Quindi $\Sigma = \sigma(K)$, dove $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica

$$\sigma(x,y) = (x, y, g(x,y)) = \left(x, y, 4x^2 - \frac{1}{4}y^2 - 9\right).$$

Il flusso di F attraverso Σ, orientata in modo che il vettore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z è

$$\int_\Sigma F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) \, dx \, dy,$$

dove $N(x,y)$ è un vettore normale a Σ che forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z, cioè con $\mathbf{k} = (0,0,1)$.

Un vettore normale a Σ è

$$N_\sigma(x,y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = \left(-8x, \frac{1}{2}y, 1\right).$$

Poiché

$$N_\sigma(x,y)\cdot \mathbf{k} = \left(-8x, \frac{1}{2}y, 1\right)\cdot (0,0,1) = 1 > 0,$$

questo vettore forma un angolo acuto con il versore fondamentale dell'asse z. Quindi $N(x,y) = N_\sigma(x,y) = \left(-8x, \frac{1}{2}y, 1\right)$.

Si ha che

$$F(\sigma(x,y))\cdot N(x,y) = F\left(x, y, 4x^2 - \frac{1}{4}y^2 - 9\right)\cdot\left(-8x, \frac{1}{2}y, 1\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{4}x,\ \frac{9}{2}y,\ 4x^2 - \frac{1}{4}y^2\right)\cdot\left(-8x, \frac{1}{2}y, 1\right) = 2\left(x^2+y^2\right).$$

Quindi

$$\int_\Sigma F\cdot n\, d\sigma = \int_K F(\sigma(x,y))\cdot N(x,y)\, dx\, dy = \int_K 2\left(x^2+y^2\right)\, dx\, dy =$$

passando in coordinate polari

$$= 2\int_{K'} \rho^3\ d\rho\, d\vartheta =$$

essendo $K' = [0,2]\times[0,\pi]$ si ottiene

$$= 2\pi \int_0^2 \rho^3\, d\rho = 2\pi\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^2 = 8\pi.$$

Esercizio 4. Si ha che $\partial\Omega = \Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3$, dove

$$\Sigma_1 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ \ x=0,\ \ y^2+z^2\le 4,\ \ y\ge 0\right\},$$

$$\Sigma_2 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ \ x=4-y^2-z^2,\ \ y^2+z^2\le 4,\ \ y\ge 0\right\},$$

$$\Sigma_3 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ \ y=0,\ \ 0\le x\le 4-z^2,\ \ -2\le z\le 2\right\}.$$

Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F\cdot n\, d\sigma = \int_{\Sigma_1} F\cdot n\, d\sigma + \int_{\Sigma_2} F\cdot n\, d\sigma + \int_{\Sigma_3} F\cdot n\, d\sigma.$$

Calcoliamo $\displaystyle\int_{\Sigma_1} F\cdot n\, d\sigma$.

La superficie Σ_1 è il grafico della funzione $g_1 : K_1\to\mathbb{R}$, $g_1(y,z)=0$, dove

$$K_1 = \left\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 :\ \ y^2+z^2\le 4,\ \ y\ge 0\right\}.$$

Quindi $\Sigma_1 = \sigma_1(K_1)$, dove $\sigma_1 : K_1 \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica

$$\sigma_1(y,z) = (g_1(y,z), y, z) = (0, y, z)\,.$$

Il flusso di F attraverso Σ_1, orientata in modo che il vettore normale a Σ_1 sia entrante in Ω è

$$\int_{\Sigma_1} F \cdot n\, d\sigma = \int_{K_1} F(\sigma_1(y,z)) \cdot N_1(y,z)\, dy\, dz,$$

dove $N_1(y,z)$ è un vettore normale a Σ_1 entrante in Ω.

Un vettore normale a Σ_1 è

$$N_{\sigma_1}(y,z) = \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(y,z) \wedge \frac{\partial \sigma_1}{\partial z}(y,z) = \left(1, -\frac{\partial g_1}{\partial y}(y,z), -\frac{\partial g_1}{\partial z}(y,z)\right) = (1,0,0)\,.$$

Questo vettore è entrante in Ω. Quindi $N_1(y,z) = N_{\sigma_1}(y,z) = (1,0,0)$.

Si ha che

$$F(\sigma_1(y,z)) \cdot N_1(y,z) = F\,(0,y,z) \cdot (1,0,0) = \left(4,\ 2y^3 z,\ -3y^2 z^2\right) \cdot (1,0,0) = 4.$$

Quindi

$$\int_{\Sigma_1} F \cdot n\, d\sigma = \int_{K_1} F(\sigma_1(y,z)) \cdot N_1(y,z)\, dy\, dz = 4 \int_{K_1} dy\, dz = 4m(K_1) = 8\pi.$$

Calcoliamo $\displaystyle\int_{\Sigma_2} F \cdot n\, d\sigma$.

La superficie Σ_2 è il grafico della funzione $g_2 : K_2 \to \mathbb{R}$, $g_2(y,z) = 4 - y^2 - z^2$, dove

$$K_2 = K_1 = \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : \ \ y^2 + z^2 \le 4, \ \ y \ge 0\right\}.$$

Quindi $\Sigma_2 = \sigma_2(K_2)$, dove $\sigma_2 : K_2 \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica

$$\sigma_2(y,z) = (g_2(y,z), y, z) = \left(4 - y^2 - z^2, y, z\right).$$

Il flusso di F attraverso Σ_2, orientata in modo che il vettore normale a Σ_2 sia entrante in Ω è

$$\int_{\Sigma_2} F \cdot n\, d\sigma = \int_{K_2} F(\sigma_2(y,z)) \cdot N_2(y,z)\, dy\, dz,$$

dove $N_2(y,z)$ è un vettore normale a Σ_2 entrante in Ω.

Un vettore normale a Σ_2 è

$$N_{\sigma_2}(y,z) = \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(y,z) \wedge \frac{\partial \sigma_2}{\partial z}(y,z) = \left(1, -\frac{\partial g_2}{\partial y}(y,z), -\frac{\partial g_2}{\partial z}(y,z)\right) = (1, 2y, 2z)\,.$$

Questo vettore è uscente da Ω. Quindi un vettore normale entrante è

$$N_2(y,z) = -N_{\sigma_2}(y,z) = (-1,-2y,-2z).$$

Si ha che

$$F(\sigma_2(y,z)) \cdot N_2(y,z) = F\left(4-y^2-z^2, y, z\right) \cdot (-1,-2y,-2z) =$$
$$= \left(4e^{4-y^2-z^2},\, 2y^3z,\, -3y^2z^2\right) \cdot (-1,-2y,-2z) = 6y^2z^3 - 4y^4z - 4e^{4-y^2-z^2}.$$

Quindi

$$\int_{\Sigma_2} F \cdot n\, d\sigma = \int_{K_2} F(\sigma_2(y,z)) \cdot N_2(y,z)\, dy\, dz = \int_{K_2} \left(6y^2z^3 - 4y^4z - 4e^{4-y^2-z^2}\right) dy\, dz =$$
$$= \underbrace{\int_{K_2} \left(6y^2z^3 - 4y^4z\, dy\, dz\right) dy\, dz}_{=0} - 4\int_{K_2} 4e^{4-y^2-z^2}\, dy\, dz =$$

osservando che il primo integrale è nullo perché la funzione integranda è dispari rispetto a z e K_2 è simmetrico rispetto all'asse y, si ottiene

$$= -4\int_{K_2} e^{4-y^2-z^2}\, dy\, dz =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine nel piano yz si ha

$$= -4\int_{K_2'} \rho e^{4-\rho^2}\, d\rho\, d\vartheta =$$

essendo $K_2' = [0,2] \times [-\pi/2, \pi/2]$ si ottiene

$$= -4\pi \int_0^2 \rho e^{4-\rho^2}\, d\rho = -4\pi \left[-\frac{1}{2}e^{4-\rho^2}\right]_0^2 = 2\pi\left(1-e^4\right).$$

Calcoliamo $\displaystyle\int_{\Sigma_3} F \cdot n\, d\sigma$.

La superficie Σ_3 è il grafico della funzione $g_3 : K_3 \to \mathbb{R}$, $g_3(x,z) = 0$, dove

$$K_3 = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 4 - z^2, \ -2 \le z \le 2\right\}.$$

Quindi $\Sigma_3 = \sigma_3(K_3)$, dove $\sigma_3 : K_3 \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica

$$\sigma_3(x,z) = (x, g_3(x,z), z) = (x, 0, z).$$

Il flusso di F attraverso Σ_3, orientata in modo che il vettore normale a Σ_3 sia entrante in Ω è

$$\int_{\Sigma_3} F \cdot n \, d\sigma = \int_{K_3} F(\sigma_3(x,z)) \cdot N_3(x,z) \, dx \, dz,$$

dove $N_3(x,z)$ è un vettore normale a Σ_3 entrante in Ω.

Un vettore normale a Σ_3 è

$$N_{\sigma_3}(x,z) = \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(x,z) \wedge \frac{\partial \sigma_3}{\partial z}(x,z) = \left(\frac{\partial g_3}{\partial x}(x,z), -1, \frac{\partial g_3}{\partial z}(x,z) \right) = (0,-1,0).$$

Questo vettore è uscente da Ω. Quindi un vettore normale entrante è $N_3(x,z) = -N_{\sigma_3}(x,z) = (0,1,0)$.

Si ha che

$$F(\sigma_3(x,z)) \cdot N_3(x,z) = F(x,0,z) \cdot (0,1,0) = (4e^x, \, 0, \, 0) \cdot (0,1,0) = 0.$$

Quindi

$$\int_{\Sigma_3} F \cdot n \, d\sigma = \int_{K_3} F(\sigma_3(x,z)) \cdot N_3(x,z) \, dx \, dz = 0.$$

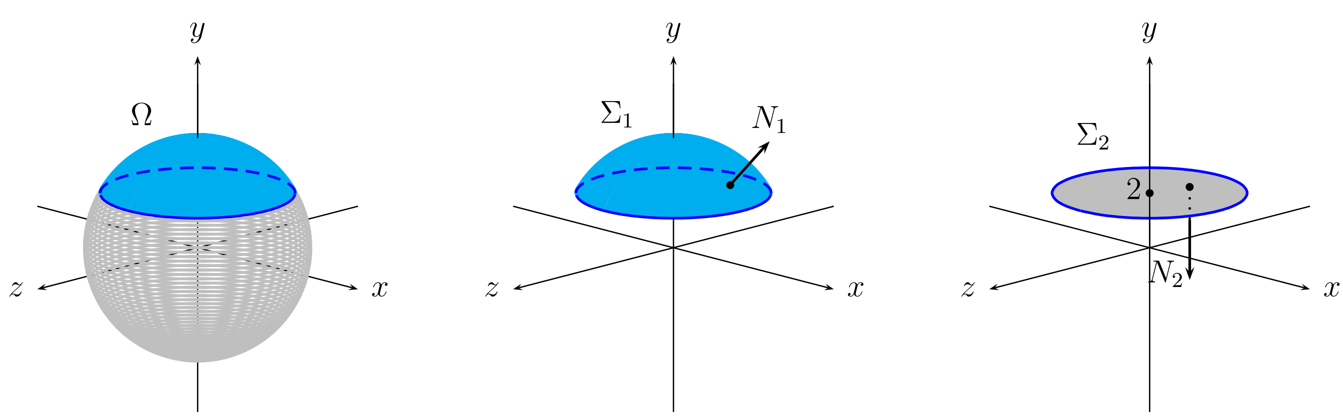
In conclusione

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Sigma_1} F \cdot n \, d\sigma + \int_{\Sigma_2} F \cdot n \, d\sigma + \int_{\Sigma_3} F \cdot n \, d\sigma = 8\pi + 2\pi \left(1 - e^4\right) = 10\pi - 2\pi \, e^4.$$

Esercizio 5. Si ha che $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, dove

$$\Sigma_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = 16, \; y \geq 2 \right\},$$

$$\Sigma_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; y = 2, \; x^2 + z^2 \leq 12 \right\}.$$



Quindi

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Sigma_1} F \cdot n \, d\sigma + \int_{\Sigma_2} F \cdot n \, d\sigma.$$

Calcoliamo $\displaystyle\int_{\Sigma_1} F\cdot n\,d\sigma$.

Osserviamo che

$$\Sigma_1 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ y=\sqrt{16-x^2-z^2},\ \ x^2+z^2\leq 12\right\}.$$

La superficie Σ_1 è il grafico della funzione $g_1: K_1\to\mathbb{R}$, $g_1(x,z)=\sqrt{16-x^2-z^2}$, dove

$$K_1=\left\{(x,z)\in\mathbb{R}^2:\ \ x^2+z^2\leq 12\right\}.$$

Quindi $\Sigma_1=\sigma_1(K_1)$, dove $\sigma_1: K_1\to\mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica

$$\sigma_1(y,z)=(x,g_1(x,z),z)=\left(x,\sqrt{16-x^2-z^2},z\right).$$

Il flusso di F attraverso Σ_1, orientata in modo che il vettore normale a Σ_1 sia uscente da Ω è

$$\int_{\Sigma_1} F\cdot n\,d\sigma=\int_{K_1} F(\sigma_1(x,z))\cdot N_1(x,z)\,dx\,dz,$$

dove $N_1(x,z)$ è un vettore normale a Σ_1 uscente da Ω.

Un vettore normale a Σ_1 è

$$N_{\sigma_1}(x,z)=\frac{\partial\sigma_1}{\partial x}(x,z)\wedge\frac{\partial\sigma_1}{\partial z}(x,z)=\left(\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,z),-1,\frac{\partial g_1}{\partial z}(x,z)\right)=\left(-\frac{x}{\sqrt{16-x^2-z^2}},-1,-\frac{z}{\sqrt{16-x^2-z^2}}\right).$$

Questo vettore è entrante in Ω. Quindi un vettore uscente da Ω è

$$N_1(x,z)=-N_{\sigma_1}(x,z)=\left(\frac{x}{\sqrt{16-x^2-z^2}},1,\frac{z}{\sqrt{16-x^2-z^2}}\right).$$

Si ha che

$$F(\sigma_1(x,z))\cdot N_1(x,z)=F\left(x,\sqrt{16-x^2-z^2},z\right)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{16-x^2-z^2}},1,\frac{z}{\sqrt{16-x^2-z^2}}\right)=$$

$$=\left(-\frac{3}{4}z,-\frac{3}{4},\frac{3}{4}x\right)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{16-x^2-z^2}},1,\frac{z}{\sqrt{16-x^2-z^2}}\right)=-\frac{3}{4}.$$

Quindi

$$\int_{\Sigma_1} F\cdot n\,d\sigma=\int_{K_1} F(\sigma_1(x,z))\cdot N_1(x,z)\,dx\,dz=-\frac{3}{4}\int_{K_1} dx\,dz=-9\pi.$$

Calcoliamo $\displaystyle\int_{\Sigma_2} F\cdot n\,d\sigma$.

La superficie Σ_2 è il grafico della funzione $g_2 : K_2 \to \mathbb{R}$, $g_2(x,z) = 2$, dove

$$K_2 = K_1 = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : \ \ x^2 + z^2 \leq 12\right\}.$$

Quindi $\Sigma_2 = \sigma_2(K_2)$, dove $\sigma_2 : K_2 \to \mathbb{R}^3$ è la superficie parametrica

$$\sigma_2(x,z) = (x, g_2(x,z), z) = (x, 2, z).$$

Il flusso di F attraverso Σ_2, orientata in modo che il vettore normale a Σ_2 sia uscente da Ω è

$$\int_{\Sigma_2} F \cdot n \, d\sigma = \int_{K_2} F(\sigma_2(x,z)) \cdot N_2(x,z) \, dx \, dz,$$

dove $N_2(x,z)$ è un vettore normale a Σ_2 uscente da Ω.

Un vettore normale a Σ_2 è

$$N_{\sigma_2}(x,z) = \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(x,z) \wedge \frac{\partial \sigma_2}{\partial z}(x,z) = \left(\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,z), -1, \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,z)\right) = (0,-1,0).$$

Questo vettore è uscente da Ω. Quindi $N_2(x,z) = N_{\sigma_2}(x,z) = (0,-1,0)$.

Si ha che

$$F(\sigma_2(x,z)) \cdot N_2(x,z) = F\,(x,2,z) \cdot (0,-1,0) =$$
$$= \left(-\frac{3z}{\sqrt{x^2+z^2+4}}, \, -\frac{3}{\sqrt{x^2+z^2+4}}, \, \frac{3x}{\sqrt{x^2+z^2+4}}\right) \cdot (0,-1,0) = \frac{3}{\sqrt{x^2+z^2+4}}.$$

Quindi

$$\int_{\Sigma_2} F \cdot n \, d\sigma = \int_{K_2} F(\sigma_2(x,z)) \cdot N_2(x,z) \, dx \, dz = \int_{K_2} \frac{3}{\sqrt{x^2+z^2+4}} \, dx \, dz =$$

passando in coordinate polari centrate nell'origine nel piano xz si ha

$$= 3 \int_{K_2'} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+4}} \, d\rho \, d\vartheta =$$

essendo $K_2' = \left[0, \sqrt{12}\right] \times [0, 2\pi]$ si ottiene

$$= 6\pi \int_0^{\sqrt{12}} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+4}} \, d\rho = 6\pi \left[\sqrt{\rho^2+4}\right]_0^{12} = 12\pi.$$

In conclusione

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Sigma_1} F \cdot n \, d\sigma + \int_{\Sigma_2} F \cdot n \, d\sigma = -9\pi + 12\pi = 3\pi.$$